INTRODUÇÃO AO ALGORITMO SIMPLEX PRIMAL

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:

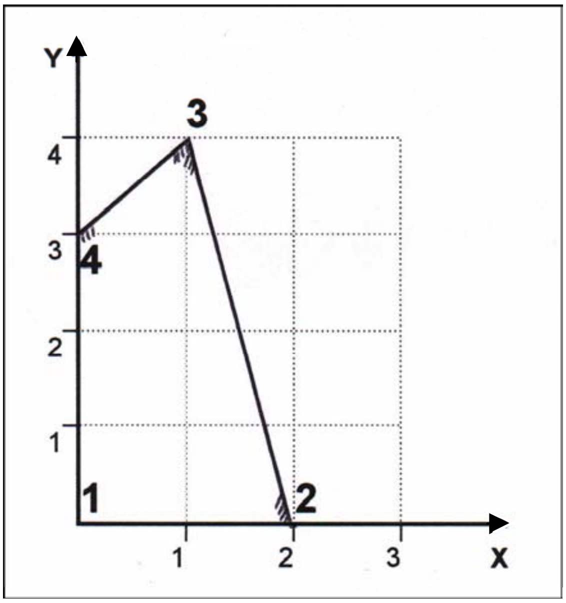
Maximizar $F = 4.\,X + 3.\,Y$

sujeito a:

$$-1\,.\,X + 1\,.\,Y \le 3$$
$$4\,.\,X + 1\,.\,Y \le 8$$

$$X\,,\; Y \ge 0$$

Na figura seguinte representa-se as restrições e os quatro vértices do espaço de soluções admissíveis correspondente a este problema.



Relativamente a este problema é fácil enumerar os vértices do espaço de soluções admissíveis, calcular o respectivo valor da função objectivo e, seleccionar a solução óptima, isto é, o vértice correspondente ao maior valor da função objectivo - o que faremos no quadro seguinte:

Vértice			$F = 4 . X + 3 . Y$	Obs.
nº	**X**	**Y**		
1	0	0	0	sol.não óptima
2	2	0	8	sol.não óptima
3	1	4	16	solução óptima
4	0	3	9	sol.não óptima

Assim, é fácil indicar a solução óptima deste problema: **X* = 1 ; Y* = 4**, a que corresponde **F* = 16**.

No entanto, como já se referiu, normalmente é incomportável estar a enumerar os vértices do espaço de soluções admissíveis de um problema de Programação Linear (com n variáveis e m restrições), pelo que é necessário utilizar um algoritmomais eficiente.

Seguidamente, faremos uma **introdução ao Algoritmo Simplex Primal** (na versão destinada à Maximização de uma função objectivo), indicando e comentando os passos a seguir para a resolução do exercício apresentado.

- 1º - Re-escrever o problema na forma standard

Maximizar $F = 4. X + 3. Y + 0 . F_1 + 0 . F_2$

sujeito a:

$$-1 . X + 1 . Y + 1 . F_1 + 0 . F_2 = 3$$
$$4 . X + 1 . Y + 0 . F_1 + 1 . F_2 = 8$$

$$X , Y , F_1 , F_2 \geq 0$$

- 2º - Arbitrar uma solução básica inicial

Relativamente ao problema em análise (com 2 restrições e 4 variáveis, na forma standard), uma solução básica é constituída por 2 variáveis básicas [recorda-se que o número de variáveis básicas é igual ao número de restrições] e 2 (2 = 4 - 2) variáveis não básicas (isto é, nulas).

☞ **Regra usual: Sempre que possível, toma-se as variáveis de folga como variáveis básicas iniciais.**

[De notar que tal só é possível quando todas as restrições são do tipo ≤ !]

Assim, ter-se-á:

S.b.a. inicial: ($X = 0$; $Y = 0$; $F_1 = 3$; $F_2 = 8$), com $F = 0$.

- 3º - Verificação da optimalidade da solução em análise

Pretendemos responder à pergunta: Será que a solução em análise já é óptima ?

Para tal, é necessário

☞ **re-escrever a função objectivo <u>apenas em função das variáveis não básicas</u>.**

Normalmente, isto é, durante a aplicação do algoritmo, nesta altura a função objectivo não está escrita apenas em função das variáveis não básicas, pelo que é preciso fazê-lo. No entanto, dado que acabámos de tomar como variáveis básicas as variáveis de folga (e como essas variáveis têm <u>coeficiente nulo na função objectivo</u>), a função objectivo já está escrita apenas em função das variáveis não básicas:

$$F = \underset{\Uparrow}{4} . X + \underset{\Uparrow}{3} . Y + \underline{0} . F_1 + \underline{0} . F_2 + \underset{\Uparrow}{0}$$

coeficientes das variáveis não básicas — valor da função objectivo

A pergunta "**Será que a solução em análise já é óptima ?**" é equivalente a uma outra: "**Valerá a pena incrementar alguma das variáveis não básicas ?**". A resposta é muito fácil de dar depois de se ter a função objectivo expressa apenas em função das variáveis não básicas, originando o

☞ **Critério de optimalidade:**

Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e <u>algum</u> desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima, isto é, ainda será possível incrementar o valor da função objectivo (bastando, para tal, incrementar uma variável não básica com coeficiente positivo).

Conclusão: a s.b.a. em análise **($X = 0$; $Y = 0$; $F_1 = 3$; $F_2 = 8$)** não é óptima já que qualquer incremento nas variáveis X e Y se traduzirá num incremento (que se deseja) na função objectivo.

Dado que o Algoritmo Simplex Primal, em cada iteração, só permite a entrada de <u>uma</u> nova variável para a base [base é o conjunto das variáveis básicas] **(com a consequente saída de <u>uma</u> variável que estava na base), correspondendo ao salto de um vértice do espaço de soluções admissíveis para outro, surge uma nova preocupação ...**

- 4º - Selecção da variável que entra na base

Presentemente a variável X vale 0 e a função objectivo vale 0 ($F = 4.X + 3.Y + 0.F_1 + 0.F_2 + 0$) . Se se incrementar a variável X de $\Delta X = 1$ unidade, a função objectivo vem incrementada de $\Delta F = 4 . \Delta X = 4$ unidades. Se se incrementar a variável Y de $\Delta Y = 1$ unidade, a função objectivo vem incrementada de $\Delta F = 3 . \Delta Y = 3$ unidades. Deve notar-se que se trata de incrementos da função objectivo devidos a incrementos unitários das variáveis... Um maior "incremento unitário" não está forçosamente associado a um maior "incremento total"...

De acordo com o Algoritmo Simplex Primal,

☞ **Critério de selecção da variável que entra na base:**

Deve ser escolhida a variável (até aí não básica) cujo incremento unitário se traduz no maior aumento da função objectivo, isto é, deve ser escolhida a variável que, na função objectivo (escrita apenas em função das variáveis não básicas) tenha o maior valor positivo como coeficiente.

Assim, selecciona-se a variável **X** para entrar na base. Teremos, agora, que pensar na

- 5º - Selecção da variável que sai da base

Para determinarmos a variável que deve deixar a base, deveremos tentar responder a uma outra questão: **Qual o incremento máximo que a variável seleccionada para entrar na base pode tomar ?**

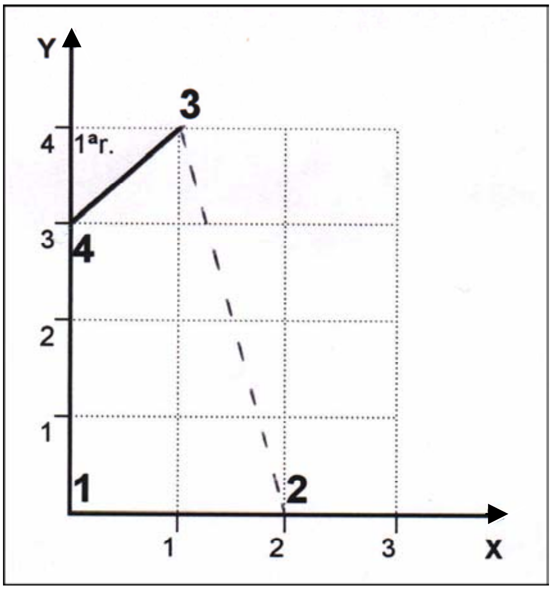
A s.b.a. ainda em análise é **($X = 0$; $Y = 0$; $F_1 = 3$; $F_2 = 8$)**, correspondendo à base **($F_1 = 3$; $F_2 = 8$) .** Na próxima iteração, a variável X vai ser incrementada, entrando na base. Uma das variáveis que actualmente estão na base deixa-la-á. A variável Y, actualmente fora da base, continuará fora da base, isto é, continuar-se-á a ter **Y = 0**.

Analisemos agora as restrições do problema:

$$\begin{array}{l} -1 . X + 1 . Y + 1 . F_1 = 3 \\ 4 . X + 1 . Y + 0 . F_1 + 1 . F_2 = 8 \end{array} \quad \rightarrow \quad Y = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} -1 . X + 1 . F_1 = 3 \\ 4 . X + 1 . F_2 = 8 \end{array}$$

Observemos, com atenção, a **1ª restrição** escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada (F_1) e da variável X que pretendenos incrementar**:** **$-1 . X + 1 . F_1 = 3$** . Se incrementarmos a variável X de uma unidade, a variável F_1 sofre um incremento de uma unidade (passando de 3 para 4). Genericamente, se incrementarmos de ΔX a variável X, a variável F_1 vem também incrementada de ΔX. Tal ocorre porque **$-1 . X + 1 . F_1 = 3 \Leftrightarrow F_1 = (3 + 1 . X) / 1$**, isto é, **o sinal negativo do coeficiente de X** na primeira restrição expressa apenas em função da única variável básica que lhe está associada (F_1) e da variável X que pretendenos incrementar (**$\underline{-1} . X + 1. F_1 = 3$**) **mostra que a primeira**

restrição não limita o aumento da variável X, o que aliás se pode observar na figura seguinte.

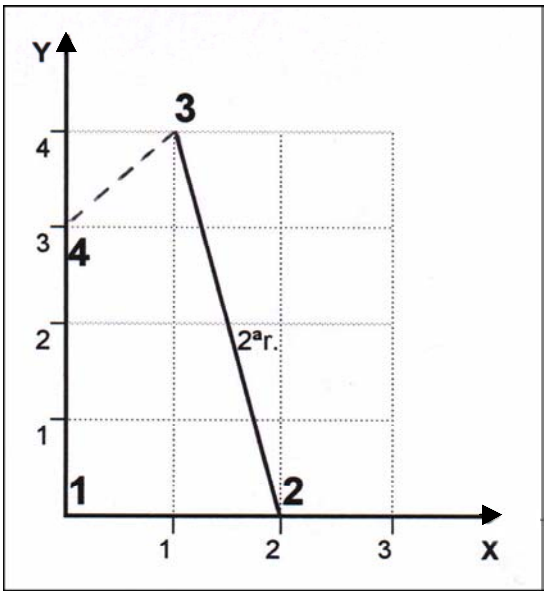


A solução em análise corresponde ao vértice **1** e pretende-se incrementar a variável X, mantendo nula a variável Y, isto é, pretendemos deslocar-nos ao longo do eixo X, para a direita. Como se vê, essa deslocação não é limitada pela 1ª restrição.

Observemos agora, com atenção, a **2ª restrição** escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada (F_2) e da variável X que pretendemos incrementar: $\mathbf{4 \cdot X + 1 \cdot F_2 = 8}$. Se incrementarmos a variável X de uma unidade, a variável F_2 sofre um decremento de quatro unidades. Assim, ao aumentarmos o valor da variável X, é preciso ter-se em atenção que **a variável F_2 diminui à medida que X aumenta e que não pode tomar valores negativos !** Assim, o maior valor que X pode tomar estará associado ao menor valor possível de F_2 , isto é $F_2 = 0$:

$$\mathbf{4 \cdot X + 1 \cdot F_2 = 8 \;\Rightarrow\; 4 \cdot X_{max} + 1 \cdot 0 = 8 \;\Leftrightarrow\; X_{max} = 8 / 4 = 2}$$

Conclusão: a segunda restrição limita o aumento da variável X ao máximo de 2 unidades, o que se pode observar na figura seguinte.



A deslocação ao longo do eixo X, para a direita é limitada pela 2ª restrição, correspondendo ao valor $X_{max} = 2$.

Acabámos de descobrir que X entrará na base com o valor 2, devendo F_2 sair da base !

Generalizando os conceitos apresentados, poderemos enunciar o

☞ **Critério de selecção da variável que sai na base:**

Considere-se as restrições do problema de Programação Linear, na sua apresentação matricial A . X = b , cada uma delas escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada e da(s) variável(eis) não básicas.

Seja X_k a variável que se pretende incrementar.

O incremento máximo de X_k será dado por

$$\boxed{\text{Max } X_k = \min_i \left(b_i \;/\; a_{ik} \right) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{para } a_{ik} > 0 \ (*).}$$

Se o incremento máximo de X_k for obtido pelo quociente relativo à r-ésima restrição, isto é, se

$$\text{Max } X_k = \min_i \left(b_i \;/\; a_{ik} \right) = b_r \;/\; a_{rk} \qquad ,$$

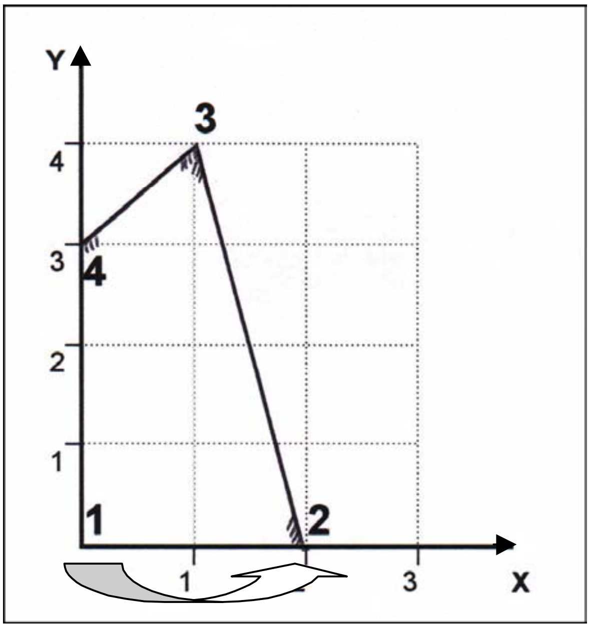
a variável básica correspondente à r-ésima restrição deverá deixar a base, cedendo o seu lugar (mas não necessariamente o seu valor) à variável X_k que entra para a base.

Nota(*): Se $a_{ik} \leq 0$, a i-ésima restrição não limita o aumento da variável X_k .

Retomemos o problema em análise: sabemos que agora **X = 2, Y = 0** e **F_2 = 0**. Para se determinar o valor da variável F_1 na nova base, basta recorrermos à 1ª restrição **- X + Y + F_1 = 3** e substituirmos X por 2, obtendo-se **F_1 = 5**. O valor da função objectivo obtém-se facilmente: $F = 4 . X + 3 . Y = 4 . 2 + 3 . 0 = 8$.

$$\boxed{\text{Assim, a nova s.b.a. é : } (X = 2 ; Y = 0 ; F_1 = 5 ; F_2 = 0), \text{ com } F = 8 .}$$

Antes de iniciarmos a segunda iteração, realcemos um aspecto para o qual se chamara já a vossa atenção: o critério de selecção da variável que entra na base selecciona a variável correspondente ao maior "incremento unitário" da função objectivo e, um maior "incremento unitário" não está forçosamente associado a um maior "incremento total"...



Se observarmos a representação gráfica do espaço de soluções admissíveis deste problema, poderemos constatar que o Algoritmo Simplex Primal fez-nos saltar do vértice **1** correspondente à origem do referencial, para o vértice **2** (X = 2 ; Y = 0) a que corresponde o valor F = 4 . 2 + 3 . 0 = 8. Tal ocorreu porque o incremento unitário da função objectivo associdо à variável X era de 4 unidades e o incremento unitário da função objectivo associado à variável Y era de "apenas" 3 unidades (pelo que se seleccionou a variável X para entrar na base).

O que aconteceria se tivéssemos saltado do vértice **1**, não para o vértice **2**, mas para o outro vértice adjacente, o **4** (X = 0 ; Y = 3) ? A função objectivo teria passado de 0 para F = 4 . 0 + 3 . 3 = 9. Ora cá está um caso em que se se tivesse feito entrar para a base a variável Y correspondente a um menor incremento unitário (3), em vez da variável X (4), a função objectivo teria tido um maior incremento total ! Então **porque é que o Algoritmo Simplex Primal não selecciona para entrar na base a variável que provoca um maior incremento total na função objectivo (em vez do maior incremento unitário) ?** Resposta: por uma questão de simplicidade! É muito mais simples implementar informaticamente o critério de selecção da variável a entrar para a base adoptado pelo Algoritmo Simplex Primal do que o critério alternativo que se referiu... E para além de mais simples é seguramente mais rápido em cada iteração... mas pode conduzir a um maior número de iterações... embora se obtenha uma eficiência global superior.

Comecemos agora a 2ª iteração !

Como se referiu, **a nova s.b.a. é : (X = 2 ; Y = 0 ; F_1 = 5 ; F_2 = 0), com F = 8** . Torna-se pertinente a pergunta: **Será que é óptima ?** [Claro que nós já sabemos, por simples análise da representação gráfica, que a resposta é negativa... Mas a pergunta é pertinente nesta fase da resolução de um qualquer problema de Programação Linear !]

Esta questão leva-nos, de novo ao terceiro passo do Algoritmo Simplex Primal, já apresentado

- 3º [2ªIter.] - *Verificação da optimalidade da solução em análise*

Recordemo-nos que é necessário

☞ **re-escrever a função objectivo <u>apenas em função das variáveis não básicas</u>.**

Neste momento, a função objectivo deve ser re-escrita apenas em função das variáveis Y e F_2.

Recordemo-nos que $F = 4 . X + 3 . Y + 0 . F_1 + 0 . F_2 + 0$ e que a segunda restrição é $4 . X + 1 . Y + 1 . F_2 = 8$. Poderemos re-escrever esta restrição $X = - 1/4 . Y - 1/4 . F_2 + 2$ e fazer a correspondente substituição na função objectivo: $F = 4 . (- 1/4 . Y - 1/4 . F_2 + 2) + 3 . Y + 0 . F_1 + 0 . F_2 + 0$, obtendo-se, assim,

$$F = \underline{0} . X + 2 . Y + \underline{0} . F_1 - 1 . F_2 + 8 .$$

$$\Uparrow \qquad \Uparrow \qquad \Uparrow$$

coeficientes das variáveis não básicas — valor da função objectivo

Recordando-nos do

☞ **Critério de optimalidade:**

> **Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e <u>algum</u> desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima,** isto é, ainda será possível incrementar o valor da função objectivo (bastando, para tal, incrementar uma variável não básica com coeficiente positivo),

poderemos concluir que a s.b.a. em análise **($X = 2$; $Y = 0$; $F_1 = 5$; $F_2 = 0$)** não é óptima já que qualquer incremento na variável Y se traduzirá num incremento (que se deseja) na função objectivo, pelo que poderemos avançar para

- 4º [2ªIter.] - *Selecção da variável que entra na base*

De acordo com o

☞ **Critério de selecção da variável que entra na base:**

> **Deve ser escolhida a variável (até aí não básica) cujo incremento unitário se traduz no maior aumento da função objectivo, isto é, deve ser escolhida a variável que, na função objectivo (escrita apenas em função das variáveis não básicas) tenha o maior valor positivo como coeficiente**,

não temos qualquer dúvida: a variável **Y** deve entrar para a base. Teremos, agora, que pensar na

- 5^o [2ªlter.] - *Selecção da variável que sai da base*

Recordemos as restrições do problema:

$-1 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_1 = 3$
$4 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_2 = 8$

Da segunda restrição, tem-se **$X = -1/4 \cdot Y - 1/4 \cdot F_2 + 2$**, que se pode substitur na primeira restrição: **$-1.(-1/4 \cdot Y - 1/4 \cdot F_2 + 2) + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_1 = 3$**, obtendo-se, então

$0 \cdot X + 5/4 \cdot Y + 1 \cdot F_1 + 1/4 \cdot F_2 = 5$
$4 \cdot X + 1 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 1 \cdot F_2 = 8$

Como **$F_2 = 0$**, temos

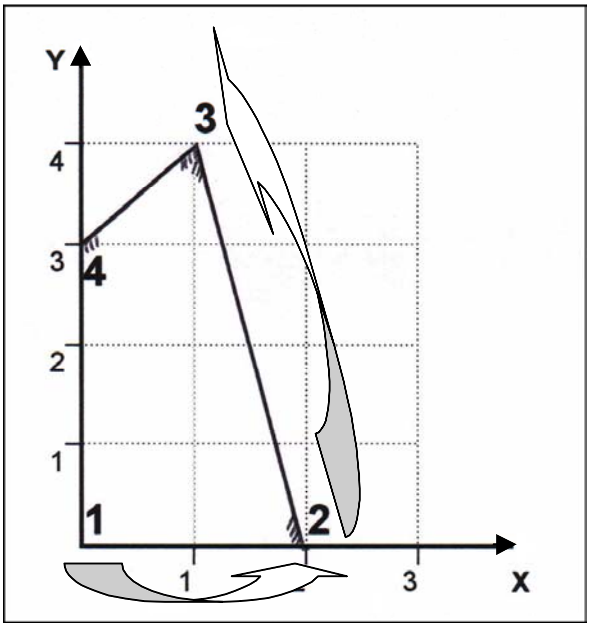
$5/4 \cdot Y + 1 \cdot F_1 = 5$
$4 \cdot X + 1 \cdot Y = 8$

Poderemos, agora, determinar o maior incremento possível para Y:

$Y_{max} = \min(5 / 5/4 \; ; \; 8/1) = 5 / 5/4 = 4 \Rightarrow F_1$ deve sair da base, ou seja, $Y = 4$; $F_1 = 0$; $F_2 = 0$. Substituindo na segunda restrição, obtém-se $X = 1$. O valor correspondente da função objectivo obtém-se facilmente: $F = 4. X + 3. Y = 4 . 1 + 3 . 4 = 16$.

Assim, a nova s.b.a. é : ($X = 1$; $Y = 4$; $F_1 = 0$; $F_2 = 0$), com $F = 16$.

Podemos observar o "percurso gráfico" seguido pelo Algoritmo Simplex Primal: inicia-se com a s.b.a. correspondente ao vértice **1** (0 ; 0) com F = 0, salta para o vértice **2** (2 ; 0) a que corresponde F = 8 e agora saltou para o vértice **3** (1 ; 4) a que corresponde F = 16:



Estar-se-á perante a solução óptima do problema ?   Ainda que já saibamos previamente a resposta a esta questão, vamos ver como é que o Algoritmo Simplex Primal nos dá a resposta.

Comecemos então a 3ª iteração !

- 3º [3ªIter.] -   Verificação da optimalidade da solução em análise

Recordemo-nos que é necessário

☞ **re-escrever a função objectivo <u>apenas em função das variáveis não básicas</u>.**

Neste momento, a função objectivo deve ser re-escrita apenas em função das variáveis F_1 e F_2. Comecemos por manipular algebricamente as restrições:

$$\begin{cases} -1 . X + 1 . Y + 1 . F_1 = 3 \\ 4 . X + 1 . Y + 1 . F_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} 1 . X - 1 . Y - 1 . F_1 = -3 & [\,1\,] \\ + \quad 4 . X + 1 . Y + 1 . F_2 = 8 & [\,2\,] \\ \hline 5 . X - 1 . F_1 + 1 . F_2 = 5 & \\ \Leftrightarrow X = 1 + 1/5 . F_1 - 1/5 . F_2 & [\,3\,] \end{array}$$

De [1] e [3] obtém-se $Y = 4 - 4/5 . F_1 - 1/5 . F_2$ [4]

Recordemo-nos que $\mathbf{F = 4 . X + 3 . Y + 0 . F_1 + 0 . F_2 + 0}$. Se nesta expressão substituirmos X e Y, respectivamente, pelos segundos membros das igualdades [3] e [4], obteremos $\mathbf{F = 4 .(1 + 1/5 . F_1 - 1/5 . F_2) + 3 .(4 - 4/5 . F_1 - 1/5 . F_2) + 0 . F_1 + 0 . F_2 + 0}$,
ou seja, $\mathbf{F = \underline{0} . X + \underline{0} . Y - 8/5 . F_1 - 7/5 . F_2 + 16}$.

$\Uparrow \quad \Uparrow \quad \Uparrow$

coeficientes das variáveis não básicas — valor da função objectivo

Recordando-nos do

☞ **Critério de optimalidade:**

Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e <u>algum</u> desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima,

poderemos concluir que a s.b.a. em análise **($X = 1$; $Y = 4$; $F_1 = 0$; $F_2 = 0$)** a que corresponde F = 16 já **é óptima**, isto é

A solução óptima do problema é:
($X^* = 1$; $Y^* = 4$; $F_1^* = 0$; $F_2^* = 0$), com $F^* = 16$.

Poderemos agora recordar os passos a seguir na resolução de um problema de Programação Linear com o **Algoritmo Simplex Primal**, que se acabou de introduzir:

- 1º - Re-escrever o problema na forma standard

☞ Introduzir variáveis de folga.

- 2º - Arbitrar uma solução básica inicial

☞ Regra usual: Sempre que possível, toma-se as variáveis de folga como variáveis básicas iniciais.

REPETIR

- 3º - Verificação da optimalidade da solução em análise

☞ re-escrever a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas.

☞ Critério de optimalidade:

Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e algum desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima.

- 4º - Selecção da variável que entra na base

☞ Critério de selecção da variável que entra na base:

Deve ser escolhida a variável (até aí não básica) cujo incremento unitário se traduz no maior aumento da função objectivo, isto é, deve ser escolhida a variável que, na função objectivo (escrita apenas em função das variáveis não básicas) tenha o maior valor positivo como coeficiente.

- 5º - Selecção da variável que sai da base

☞ Critério de selecção da variável que sai na base:

Considere-se as restrições do problema de Programação Linear, na sua apresentação matricial $A \cdot X = b$, cada uma delas escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada e da(s) variável(eis) não básicas.

Seja X_k a variável que se pretende incrementar.

O incremento máximo de X_k será dado por

$$\text{Max } X_k = \min_i \left(b_i \;/\; a_{ik} \right) \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{para } a_{ik} > 0 \;\; \textbf{(*)}.$$

Se o incremento máximo de X_k for obtido pelo quociente relativo à r-ésima restrição, isto é, se

$$\text{Max } X_k = \min_i \left(b_i \;/\; a_{ik} \right) = b_r \;/\; a_{rk} \qquad ,$$

a variável básica correspondente à r-ésima restrição deverá deixar a base, cedendo o seu lugar (mas não necessariamente o seu valor) à variável X_k que entra para a base.

Nota (*): Se $a_{ik} \leq 0$, a i-ésima restrição não limita o aumento da variável X_k.

ATÉ SE ATINGIR A SOLUÇÃO ÓPTIMA

O ALGORITMO SIMPLEX PRIMAL

Consideremos o problema de Programação Linear já apresentado na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal":

Maximizar $F = 4.\,X + 3.\,Y$

sujeito a:

$$-1\,.\,X + 1\,.\,Y \leq 3$$
$$4\,.\,X + 1\,.\,Y \leq 8$$

$$X\,,\ Y \geq 0$$

Comecemos por re-escrever o problema na forma standard:

Maximizar $F = 4.\,X + 3.\,Y + 0\,.\,F_1 + 0\,.\,F_2$

sujeito a:

$$-1\,.\,X + 1\,.\,Y + 1\,.\,F_1 + 0\,.\,F_2 = 3$$
$$4\,.\,X + 1\,.\,Y + 0\,.\,F_1 + 1\,.\,F_2 = 8$$

$$X\,,\ Y\,,\ F_1\,,\ F_2 \geq 0$$

Re-escrevamos $F = 4.\,X + 3.\,Y + 0\,.\,F_1 + 0\,.\,F_2$

na forma equivalente $F - 4.\,X - 3.\,Y + 0\,.\,F_1 + 0\,.\,F_2 = 0$.

Poderemos, então, apresentar o problema na forma seguinte:

Max. F

$$
\begin{aligned}
-1 . X + 1 . Y + 1 . F_1 + 0 . F_2 &= 3 \\
4 . X + 1 . Y + 0 . F_1 + 1 . F_2 &= 8 \\
F - 4 . X - 3 . Y + 0 . F_1 + 0 . F_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$X \ , \ Y \ , \ F_1 \ , \ F_2 \geq 0 \ ,$$

ou na representação tabular equivalente:

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
	-1	1	**1**	**0**	3
	4	1	**0**	**1**	8
F	-4	-3	**0**	**0**	0

.

O quadro anterior diz-se um **"Quadro do SIMPLEX"** pois apresenta as seguintes características:

- **É possível identificar uma variável básica associada a cada restrição**. Uma variável pode considerar-se básica associada a uma restrição se o seu coeficiente na linha que representa essa restrição no Quadro do Simplex (QS) for unitário, sendo nulos todos os demais coeficientes dessa variável nas restantes linhas do QS (incluindo a linha que representa a função objectivo). É habitual utilizar-se a "coluna exterior esquerda" para identificar as variáveis básicas; relativamente a este problema ter-se-ia:

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
F_1	-1	1	**1**	**0**	3
F_2	4	1	**0**	**1**	8
F	-4	-3	**0**	**0**	0

.

- Num QS **a função objectivo está sempre representada apenas em função das variáveis não básicas**. Assim, o coeficiente das variáveis básicas na linha que representa a função objectivo, é sempre nulo (como aliás decorria da primeira característica apresentada anteriormente).

  De realçar que se apresentará o Algoritmo Simplex Primal para resolver problemas de maximização (Max $F = c_1 . X_1 + c_2 . X_2 + ... + c_n . X_n$) e que, nos QS a função objectivo será escrita na forma $F - c_1 . X_1 - c_2 . X_2 - ... - c_n . X_n = 0$.

- **No Algoritmo Simplex Primal, um Quadro do Simplex corresponde sempre a uma solução básica admissível, isto é, a um vértice do espaço de soluções admissíveis.**

- **Os termos independentes** (T.I.), indicados na "coluna exterior direita", **correspondem aos valores assumidos pelas variáveis básicas e pela função objectivo, relativas à s.b.a. a que corresponde o QS.** Assim, a leitura do QS apresentado permite concluir-se estarmos perante a base ($F_1 = 3$; $F_2 = 8$) a que corresponde o valor da função ojectivo F = 0. Como X e Y não pertencem à base, conclui-se que X = Y = 0 .

O Algoritmo Simplex Primal baseia-se nos princípios apresentados na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal" e na utilização dos "Quadros do Simplex" que condensam a informação relevante de um modo mais eficiente. Os cálculos aparentemente fastidiosos apresentados na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal" serão feitos de um modo expedito graças à utilização dos QS.

Assim, **um primeiro passo para a resolução de um problema de Programação Linear consiste na elaboração de um primeiro "Quadro do Simplex" correspondente a uma s.b.a. inicial.**

☞ Desde já se chama a atenção para o facto da representação tabular inicial de um problema de Programação Linear não ser obrigatoriamente um "Quadro do Simplex" ! ... Com efeito, basta que uma restrição seja do tipo $\geq$ para que a representação tabular inicial do problema não seja um "Quadro do Simplex" ! Voltaremos posteriormente a esta questão...

Relativamente ao problema em análise o primeiro "Quadro do Simplex" é o seguinte:

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
F_1	-1	1	**1**	**0**	3
F_2	4	1	**0**	**1**	8
F	-4	-3	**0**	**0**	0

.

Recordemo-nos de algumas noções apresentadas na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal": Depois de se ter arbitrado uma s.b.a. inicial, a primeira preocupação consistia em **verificar a optimalidade da solução em análise**. O **critério de optimalidade** enunciava: **Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e <u>algum</u> desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima.**

Dado que na apresentação tabular utilizada no Algoritmo Simplex Primal a função objectivo $\mathbf{Max\ F = c_1 . X_1 + c_2 . X_2 + ... + c_n . X_n}$ é escrita na forma $\mathbf{F - c_1 . X_1 - c_2 . X_2 - ... - c_n . X_n = 0}$, poderemos apresentar o

☞ **Critério de optimalidade do Algoritmo Simplex Primal:**

Quando num "Quadro do Simplex" se pode observar, pelo menos, um coeficiente negativo na linha correspondente à função objectivo, a solução em análise não é óptima.

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
F_1	-1	1	**1**	**0**	3
F_2	4	1	**0**	**1**	8
F	**- 4**	**- 3**	**0**	**0**	0
	↑	↑			

.

Por simples inspecção do "Quadro do Simplex" apresentado acima, poder-se-á concluir que a correspondente **s.b.a (X = 0 ; Y = 0 ; F_1 = 3 ; F_2 = 8) não é óptima**.

É, também, muito fácil indicar o

☞ **Critério do Algoritmo Simplex Primal para selecção da variável que entra na base:**

Deve ser incrementada a variável com o coeficiente <u>mais negativo</u> na linha correspondente à função objectivo.

Assim, por simples inspecção do "Quadro do Simplex" apresentado acima, poder-se-á concluir que **a variável X deve ser incrementada** (já que o seu coeficiente na linha correspondente à função objectivo é o mais negativo: -4), o que se pode assinalar do modo seguinte:

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
F_1	-1	1	**1**	**0**	3
F_2	4	1	**0**	**1**	8
F	**- 4**	-3	**0**	**0**	0
	↑				

Qual o incremento máximo a dar à variável X ? E qual das variáveis F_1 ou F_2 deve deixar a base ? Para responder a estas questões deveremos recordar-nos do

☞ **Critério do Algoritmo Simplex Primal para selecção da variável que sai na base:**

Considere-se as restrições do problema de Programação Linear, na sua apresentação matricial A . X = b , cada uma delas escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada e da(s) variável(eis) não básicas.

Seja X_k a variável que se pretende incrementar.

O incremento máximo de X_k será dado por

$$\boxed{\text{Max } X_k = \min_i \left(b_i \ / \ a_{ik} \right) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{para } a_{ik} > 0 \ (*).}$$

Se o incremento máximo de X_k for obtido pelo quociente relativo à r-ésima restrição, isto é, se

$$\text{Max } X_k = \min_i \left(b_i \ / \ a_{ik} \right) = b_r \ / \ a_{rk} \quad ,$$

a variável básica correspondente à r-ésima restrição deverá deixar a base, cedendo o seu lugar (mas não necessariamente o seu valor) à variável X_k que entra para a base.

Nota(*): Se $a_{ik} \leq 0$, a i-ésima restrição não limita o aumento da variável X_k .

Assim, deveremos começar por calcular os incrementos $\Delta_i = b_i \ / \ a_{ik}$ para todas as restrições i = 1, 2 , ... , m desde que $a_{ik} > 0$. O novo valor de X_k será igual a $\Delta = \min (\Delta_i)$. Aproveitando o "Quadro do Simplex" poderemos acrescentar uma "coluna exterior à direita":

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_i	
F_1	**-1** (*)	1	1	0	**3**	—	(*)
F_2	**4**	1	0	1	**8**	8 / 4	←
F	- 4	-3	0	0	0	$\Delta = 2$	
	↑						

Nota(*): $a_{11} \leq 0$, pelo que a 1ª restrição não limita o aumento da variável X.

Como o mínimo dos valores de Δ_i corresponde à segunda restrição (segunda linha do "Quadro do Simplex", assinalou-se à direita essa linha com ← , indicando ser nesta restrição que se vai proceder à troca de variáveis na base. Assim, entra para a base a variável **X** e sai da base a variável **F_2** (que era a variável básica "associada à segunda restrição"). **F_1** manter-se-á a variável básica "associada à primeira restrição".

Podemos desde já indicar a base correspondente ao próximo "Quadro do Simplex": (**F_1** , **X**) e proceder ao seu "preenchimento prévio":

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
F_1	0		1		
X	1		0		2
F	0		0		

O "preenchimento prévio" efectuado corresponde apenas à indicação da nova base e do valor que a variável que acaba de entrar na base vai tomar (**X** tomará o valor 2, que foi o valor de Δ determinado no Quadro anterior).

☞ Para preenchermos o resto do Quadro deveremos começar por **escrever e destacar a "Linha-Pivot"**, isto é a linha correspondente à restrição onde se operou a troca de variáveis na base.

Para se obter a "Linha-Pivot" deve dividir-se os coeficientes da correspondente linha do Quadro anterior pelo coeficiente (nessa linha) da variável que acaba de entrar para a base. Assim, obtém-se o coeficiente unitário dessa variável nessa linha.

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
	4	1	0	1	8
F					

Dividindo por 4

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
	1	1/4	0	1/4	2
F					

Completemos o Quadro com os elementos do "preenchimento prévio" e destaquemos a "Coluna-Pivot" correspondente à variável que acabou de entrar na base. Será a partir da "Coluna-Pivot" e da "Linha-Pivot" que se fará o preenchimento do resto do Quadro.

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
F_1	0		1		
X	**1**	1/4	0	1/4	2
F	0		0		

Para obtermos uma linha do novo Quadro "multplicaremos" a "Linha-Pivot" do novo Quadro pelo simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base e "soma-se" à linha correspondente do Quadro anterior. (Hum... muito complicado de se enunciar... mas, muito simples de fazer !)

Comecemos pela primeira linha:

Quadro Anterior		X	Y	F_1	F_2	T.I.
	F_1	-1	1	1	0	3

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base = - (-1) = + 1

(+ 1) x	**1**	**1/4**	**0**	**1/4**	**2**
+	-1	1	1	0	3
Nova Linha	0	5/4	1	1/4	5

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
F_1	**0**	5/4	**1**	1/4	5
X	**1**	**1/4**	**0**	**1/4**	**2**
F	**0**		**0**		

Passemos à terceira linha:

Quadro Anterior		X	Y	F_1	F_2	T.I.
	F	- 4	-3	0	0	0

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base= - (-4) = + 4

(+ 4) x	**1**	**1/4**	**0**	**1/4**	**2**
	- 4	-3	0	0	0
Nova Linha	0	-2	0	1	8

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
F_1	**0**	5/4	**1**	1/4	5
X	**1**	**1/4**	**0**	**1/4**	**2**
F	**0**	-2	**0**	1	8

E já está ! O segundo "Quadro do Simplex" ! Olhando para a última linha constatamos não se tratar ainda da solução óptima:

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
F_1	**0**	5/4	**1**	1/4	5
X	**1**	**1/4**	**0**	**1/4**	**2**
F	**0**	-2	**0**	1	8
		↑			

A variável Y deve entrar para a base. Determinemos agora qual a variável que deve sair da base:

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_j	
F_1	0	5/4	1	1/4	5	5/(5/4)	←
X	1	1/4	0	1/4	2	2/(1/4)	
F	0	-2	0	1	8	Δ = 4	
		↑					

Conclusão: **F_1** deve deixar a base, cedendo o seu lugar à variável **Y**.

Avancemos agora mais rapidamente para o terceiro "Quadro do Simplex":

"Preenchimento prévio":

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
Y	0	1			4
X	1	0			
F	0	0			

"Linha-Pivot":

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
	0	5/4	1	1/4	5
F					

Dividir a primeira linha por 5/4

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
	0	1	4/5	1/5	4
F					

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
Y	0	1	4/5	1/5	4
X	1	0			
F	0	0			

Segunda linha:

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
Quadro Anterior	1	1/4	0	1/4	2

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base = - (1/4)

- (1/4) x	0	1	4/5	1/5	4
+	1	1/4	0	1/4	2
Nova Linha	1	0	-1/5	1/5	1

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
Y	0	1	4/5	1/5	4

X	1	**0**	-1/5	1/5	1
F	0	**0**			

Passemos à terceira linha:

Quadro Anterior		**X**	**Y**	**F_1**	**F_2**	**T.I.**
	F	0	-2	0	1	8

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base= - (-2) = + 2

(+ 2) x	**0**	**1**	**4/5**	**1/5**	**4**
	0	-2	0	1	8
Nova Linha	0	0	8/5	7/5	16

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
Y	**0**	**1**	**4/5**	**1/5**	**4**
X	1	**0**	-1/5	1/5	1
F	0	**0**	8/5	7/5	16

E já está ! O terceiro "Quadro do Simplex" ! Olhando para a última linha constatamos tratar-se (finalmente...) da solução óptima ! (os coeficientes das variáveis não básicas na linha correspondente à função objectivo são positivos)

Ou seja, tal como já havíamos determinado gráficamente,

$X^* = 1$; $Y^* = 4$; $F_1^* = 0$; $F_2^* = 0$; $F^* = 16$.

Poderemos, agora, recordar de modo mais condensado a resolução do problema

Maximizar $F = 4. X + 3. Y$

sujeito a:

$$-1 . X + 1 . Y \leq 3$$
$$4 . X + 1 . Y \leq 8$$

$$X , Y \geq 0$$

pelo Algoritmo Simplex Primal:

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_i		
F_1	-1	1	1	0	3	—		**Quadro Inicial**
F_2	4	1	0	1	8	8 / 4	←	
F	- 4	-3	0	0	0	$\Delta = 2$		**X = 0 ; Y = 0**

↑

F = 0

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_j	
F_1	**0**	5/4	**1**	1/4	5	5/(5/4)	←
X	**1**	**1/4**	**0**	**1/4**	**2**	2/(1/4)	
F	**0**	-2	**0**	1	8	Δ = 4	
		↑					

1ª Iteração

X = 2 ; Y = 0
F = 8

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
Y	**0**	**1**	**4/5**	**1/5**	**4**
X	1	**0**	-1/5	1/5	1
F	0	**0**	8/5	7/5	16

2ª Iteração

X* = 1 ; Y* = 4
F* = 16
Sol. Óptima

Resolvamos agora um novo problema de Programação Linear utilizando o Algoritmo Simplex Primal:

Maximizar F = 2. X + 3. Y

sujeito a:

$$1 \cdot X + 3 \cdot Y \leq 12$$
$$1 \cdot X + 1 \cdot Y \leq 6$$
$$2 \cdot X + 1 \cdot Y \leq 10$$

$$X , Y \geq 0$$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j	
F_1	1	3	1	0	0	12	12/3	←
F_2	1	1	0	1	0	6	6/1	
F_3	2	1	0	0	1	10	10/1	
F	- 2	-3	0	0	0	0	Δ = 4	
		↑						

Quadro Inicial

X = 0 ; Y = 0
F = 0

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j	
Y	**1/3**	**1**	**1/3**	**0**	**0**	**4**	4/(1/3)	
F_2	2/3	**0**	-1/3	1	0	2	2/(2/3)	←
F_3	5/3	**0**	-1/3	0	1	6	6/(5/3)	
F	- 1	**0**	1	0	0	12	Δ = 3	
	↑							

1ª Iteração

X = 0 ; Y = 4
F = 12

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.
Y	**0**	1	1/2	-1/2	0	3
X	**1**	**0**	**-1/2**	**3/2**	**0**	**3**
F_3	**0**	0	1/2	-5/2	1	1
F	**0**	0	1/2	3/2	0	15

2ª Iteração

X* = 3 ; Y* = 3
F* = 15
Sol. óptima

Na resolução do problema anterior, o Quadro do Simplex inicial corresponde (em termos gráficos) à origem do referencial, isto é, (X , Y) = (0 , 0) com F = 0. O Quadro correspondente à primeira iteração refere-se à solução (X , Y) = (0 , 4) com F = 12. O Quadro correspondente à segunda iteração refere-se à solução óptima (X* , Y*) = (3 , 3) com F* = 15.

Façamos uma ligeira alteração no problema anterior, alterando a função objectivo:

Maximizar F = 3. X + 3. Y

sujeito a:

$$\begin{aligned} 1 \,.\, X + 3 \,.\, Y &\leq 12 \\ 1 \,.\, X + 1 \,.\, Y &\leq 6 \\ 2 \,.\, X + 1 \,.\, Y &\leq 10 \end{aligned}$$

$$X \,,\, Y \geq 0$$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j	
F_1	1	3	1	0	0	12	12/1	
F_2	1	1	0	1	0	6	6/1	
F_3	2	1	0	0	1	10	10/2	←
F	- 3	-3	0	0	0	0	Δ = 5	
	↑	↑						

Quadro Inicial

X = 0 ; Y = 0
F = 0

Nota: Em caso de "empate", optaremos pela variável "empatada" que primeiro aparecer na "lista de variáveis".

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j	
F_1	**0**	5/2	1	0	-1/2	7	7/(5/2)	
F_2	**0**	1/2	0	1	-1/2	1	1/(1/2)	←
X	**1**	**1/2**	**0**	**0**	**1/2**	**5**	5/(1/2)	
F	**0**	**-3/2**	0	0	3/2	15	Δ = 2	
		↑						

1ª Iteração

X = 5; Y = 0
F = 15

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.
F_1	0	**0**	1	-5	2	2
Y	**0**	**1**	**0**	**2**	**-1**	**2**
X	1	**0**	0	-1	1	4
F	0	**0**	0	3	0	18

2ª Iteração

X* = 4 ; Y* = 2
F* = 18
Sol. óptima

Observemos com atenção o Quadro do Simplex anterior. Trata-se de um Quadro correspondente a uma solução óptima, (X* , Y*) = (4 , 2), já que na linha que representa a função objectivo não há coeficientes negativos. No entanto, uma observação mais cuidadosa permite-nos constatar que o coeficiente da variável não básica F_3 nessa linha não é negativo, mas também não é estritamente positivo ! Ora se esse coeficiente não fosse igual a zero, mas apenas "ligeiramente" negativo, diríamos não estar perante a solução óptima e incrementaríamos a variável F_3 . Experimentemos incrementar essa variável, fazendo-a entrar para a base...

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j	
F_1	0	**0**	1	-5	2	2	2 / 2	←
Y	**0**	**1**	**0**	**2**	**-1**	**2**	—	
X	1	**0**	0	-1	1	4	4 / 1	
F	0	**0**	0	3	**0**	18	Δ = 1	
					↑			

2ª Iteração

X* = 4 ; Y* = 2
F* = 18
Sol. óptima

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	
F_3	**0**	**0**	**1/2**	**-5/2**	**1**	**1**	←
Y	0	1	1/2	-1/2	**0**	3	
X	1	0	-1/2	3/2	**0**	3	

3ª Iteração

X* = 3 ; Y* = 3
F* = 18

F	0	0	**0** ↑	3	**0**	18	**Sol. óptima**

O novo Quadro corresponde a uma nova solução básica óptima ! [É claro que o valor da função objectivo permanece inalterável, pois já era o valor óptimo F* = 18] . A nova solução básica admissível óptima é (X* , Y*) = (3 , 3).

Observemos com cuidado a linha que representa a função objectivo. à semelhança do que já havíamos notado, o coeficiente da variável não básica $\mathbf{F_1}$ nessa linha é nulo. Ora se esse coeficiente não fosse igual a zero, mas apenas "ligeiramente" negativo, diríamos não estar perante a solução óptima e incrementaríamos a variável $\mathbf{F_1}$. Se experimentarmos incrementar essa variável, fazendo-a entrar para a base...

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j		**3ª Iteração**
F_3	**0**	**0**	**1/2**	**-5/2**	**1**	**1**	1/(1/2)	←	
Y	0	1	1/2	-1/2	**0**	3	3/(1/2)		**X* = 3 ; Y* = 3**
X	1	0	-1/2	3/2	**0**	3	—		**F* = 15**
F	0	0	**0** ↑	3	**0**	18	Δ = 2		**Sol. óptima**

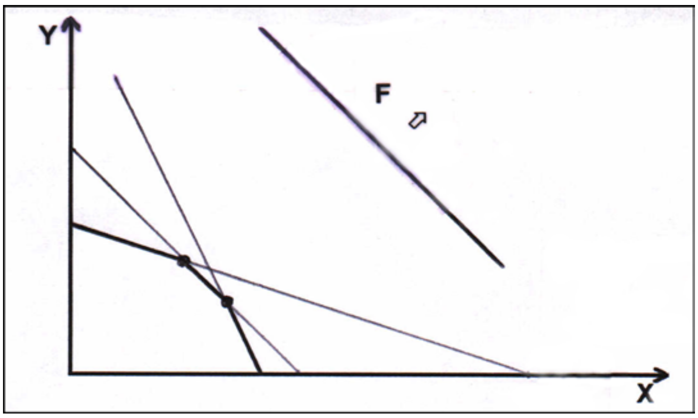
Conclusão: Deve entrar para a base a variável $\mathbf{F_1}$ (correspondendo à primeira linha do novo Quadro) em substituição da variável $\mathbf{F_3}$. Mas essa é exactamente a solução básica admissível correspondente ao Quadro respeitante à segunda iteração ! Ou seja, o "2º Quadro" remete-nos para o "3º Quadro" e vice-versa !

Poderemos assim concluir que **se na linha que representa a função objectivo num Quadro do Simplex não houver coeficientes negativos, mas se um coeficiente correspondente a uma variável não básica for nulo, então estaremos perante uma situação de mutiplicidade de soluções óptimas !**

Relativamente ao problema em análise, o Algoritmo Simplex Primal indica-nos que são óptimas as duas soluções básicas admissíveis correspondentes a (X , Y) = (4 , 2) e (X , Y) = (3 , 3), sendo ainda óptimas todas as soluções resultantes da combinação linear convexa dessas duas soluções básicas admissíveis, isto é

$$\mathbf{(X^* , Y^*) = \lambda . (4 , 2) + (1 - \lambda) . (3 , 3) \quad ; \quad \lambda \in [0 , 1] \ .}$$

Em termos gráficos, ter-se-ia:



Recordemos a sequência dos Quadros do Simplex correspondentes à resolução deste problema:

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j		
F_1	1	3	1	0	0	12	12/1		**Quadro Inicial**
F_2	1	1	0	1	0	6	6/1		
F_3	2	1	0	0	1	10	10/2	←	**X = 0 ; Y = 0**
F	- 3	-3	0	0	0	0	Δ = 5		**F = 0**
	↑	↑							

Nota: Em caso de "empate", optaremos pela variável "empatada" que primeiro aparecer na "lista de variáveis".

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j		
F_1	**0**	5/2	1	0	-1/2	7	7/(5/2)		**1ª Iteração**
F_2	**0**	1/2	0	1	-1/2	1	1/(1/2)	←	
X	**1**	**1/2**	**0**	**0**	**1/2**	**5**	5/(1/2)		**X = 5; Y = 0**
F	**0**	**-3/2**	0	0	3/2	15	Δ = 2		**F = 15**
		↑							

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j		
									2ª Iteração
F_1	0	**0**	1	-5	2	2	2 / 2	←	
Y	**0**	**1**	**0**	**2**	**-1**		—		**X* = 4 ; Y* = 2**
X	1	**0**	0	-1	1	4	4 / 1		**F* = 18**
F	0	**0**	0	3	**0**	18	Δ = 1		**Sol. óptima**
					↑				

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j		
									3ª Iteração
F_3	**0**	**0**	**1/2**	**-5/2**	**1**	**1**	1/(1/2)	←	
Y	0	1	1/2	-1/2	**0**	3	3/(1/2)		**X* = 3 ; Y* = 3**
X	1	0	-1/2	3/2	**0**	3	—		**F* = 15**
F	0	0	**0**	3	**0**	18	Δ = 2		**Sol. óptima**
			↑						

$$(X^* , Y^*) = \lambda . (4 , 2) + (1 - \lambda) . (3 , 3) \quad ; \quad \lambda \in [0 , 1] .$$

Consideremos agora o seguinte problema de Programação Linear:

Maximizar F = - 2. X + 4. Y

sujeito a:

$$-4 . X + 2 . Y \leq 1$$
$$-1 . X + 2 . Y \leq 6$$

$$X , Y \geq 0$$

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_j		
								Quadro
F_1	-4	2	1	0	1	1 / 2	←	**Inicial**
F_2	-1	2	0	1	6	6 / 2		**X = 0 ; Y = 0**
F	2	-4	0	0	0	Δ = 1/2		**F = 0**
		↑						

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_j		
								1ª Iteração
Y	**-2**	**1**	**1/2**	**0**	**1/2**	—		
F_2	3	**0**	-1	1	5	5 / 3	←	**X = 0 ; Y = 1/2**

F	-6	0	2	0	2	Δ = 5/3	**F = 2**
	↑						

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_i	**1ª Iteração**
Y	**0**	1	-1/6	2/3	23/6	—	
X	**1**	**0**	**-1/3**	**1/3**	**5/3**	—	**X*= 5/3 ; Y* = 23/6**
F	**0**	0	**0**	2	12	Δ = **?**	**F* = 12**
			↑				**Sol. óptima não única !**

Observemos o que se passou na resolução deste problema: inicialmente analisou-se a origem do referencial (X , Y) = (0 , 0) com F = 0, constatando-se não se tratar da solução óptima. Com a entrada de Y para a base, passou-se, então, para (X , Y) = = (0 , 1/2) com F = 2, que ainda não corresponde à solução óptima. De seguida, entrou X para a base, passando-se a (X , Y) = (5/3 , 23/6) com F = 12, tendo-se verificado tratar-se de uma solução óptima. No entanto, a existência de um coeficiente nulo correspondente a uma variável não básica na linha da função objectivo indica-nos uma situação de multiplicidade de soluções óptimas.

Para determinar a outra solução básica admissível óptima incrementamos a variável $\mathbf{F_1}$. No entanto, quando se vai investigar qual a variável da base (X ou Y) que sái da base para dar lugar a $\mathbf{F_1}$ constata-se que nenhuma dessas variáveis (X ou Y) limita o aumento da variável $\mathbf{F_1}$, isto é, pode-se aumentar $\mathbf{F_1}$ tanto quanto se pretender, sem qualquer restrição relativamente a X ou Y !

Moral da história: Estamos perante uma **situação de multiplicidade de soluções óptimas, mas com apenas uma solução básica admissível óptima !**

Sabemos, assim, que (X* , Y*) = (5/3 , 23/6) com F* = 12. Sabemos ainda que de entre as variáveis não básicas do último Quadro do Simplex (F_1 e F_2) a variável F_1 deveria ser incrementada (isto é, $F_1^* \geq 0$) e, consequentemente, F_2 continua fora da base (ou seja, $F_2^* = 0$).

Como $F_1^* \geq 0$ é equivalente a $- 4 . X^* + 2 . Y^* \leq 1$ e como $F_2^* = 0$ se pode escrever na forma $- 1 . X^* + 2 . Y^* = 6$, a conjunção destas duas condições é equivalente a $Y^* = 3 + (1/2) . X^*$

$$\begin{cases} F_1^* \geq 0 \\ F_2^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - 4 . X^* + 2 . Y^* \leq 1 \\ - 1 . X^* + 2 . Y^* = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - 4 . X^* + 2 . (3 + (1/2) . X^*) \leq 1 \\ Y^* = 3 + (1/2) . X^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^* \geq 5/3 \\ Y^* = 3 + (1/2) . X^* \end{cases}$$

Assim, as soluções óptimas deste problema são os pares ordenados (X* , Y*) que verificam simultaneamente as duas condições **X* ≥ 5/3** **e** **Y* = 3 + (1/2) . X*** . Se **X* = 5/3** , então **Y* = 23/6** (trata-se da única solução básica admissível óptima deste problema); se **X* > 5/3** , então **Y* = 3 + (1/2) . X*** (tratando-se de uma solução não básica admissível e óptima). De notar que, como é óbvio, todas as soluções óptimas estão associadas ao mesmo valor da função objectivo, **F* = 12**.

☞ **Aproveite para resolver este problema recorrendo ao Método Gráfico. Poderá, assim, observar um problema com um espaço de soluções admissíveis ilimitado e com um número ilimitado de soluções óptimas (sendo apenas uma dela básica).**

☞ **Altere adequadamente a função objectivo de modo a que o novo problema admita apenas uma única solução óptima (que, sendo única, será obrigatoriamente básica).**

Terminaremos a apresentação do Algoritmo Simplex Primal com a resolução de uma variante do anterior problema de Programação Linear:

Maximizar $F = 2 . X + 3 . Y$

sujeito a:

$$-4 . X + 2 . Y \leq 1$$
$$-1 . X + 2 . Y \leq 6$$

$$X , Y \geq 0$$

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_j		**Quadro**
F_1	-4	2	1	0	1	1 / 2	←	**Inicial**
F_2	-1	2	0	1	6	6 / 2		**X = 0 ; Y = 0**
F	2	-3	0	0	0	Δ = 1/2		**F = 0**
		↑						

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_j		**1ª Iteração**
Y	**-2**	**1**	**1/2**	**0**	**1/2**	—		
F_2	3	**0**	-1	1	5	5 / 3	←	**X = 0 ; Y = 1/2**
F	-8	**0**	3/2	0	3/2	Δ = 5/3		**F = 3/2**
	↑							

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_j	**1ª Iteração**
Y	**0**	1	-1/6	2/3	23/6	—	
X	**1**	**0**	**-1/3**	**1/3**	**5/3**	—	**X*= 5/3 ; Y* = 23/6**
F	**0**	0	**- 7/6**	8/3	89/6	Δ = **?**	**F* = 89/6**
			↑				**Sol. não óptima**

Observemos o que se passou na resolução deste problema: inicialmente analisou--se a origem do referencial (X , Y) = (0 , 0) com F = 0, constatando-se não se tratar da solução óptima. Com a entrada de Y para a base, passou-se, então, para (X , Y) = = (0 , 1/2) com F = 3/2, que ainda não corresponde à solução óptima. De seguida, entrou X para a base, passando-se a (X , Y) = (5/3 , 23/6) com F = 89/6, tendo-se verificado que ainda não se tratava de uma solução óptima. Quando vamos investigar qual a variável que deverá sair da base para ceder o seu lugar a F_1, constatamos que nem X nem Y limitam o aumento de F_1 ! Ou seja, a solução deste problema é indeterminada, já que a função objectivo poderá aumentar de valor indefinidamente !

☞ Moral da história: Estamos perante um **espaço de soluções admissíveis ilimitado e sem uma solução óptima do problema determinada, já que a função objectivo poderá aumentar de valor indefinidamente !** (O que poderá constatar facilmente através da resolução gráfica).